

**AUTOURS DU COURS ( 10 points )**

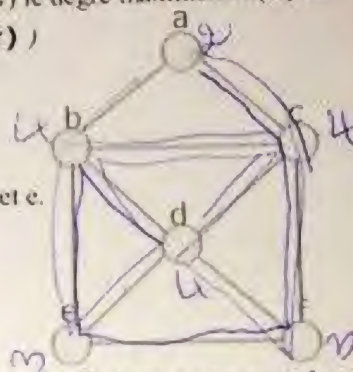
**Exercice 1 :** Construire un graphe orienté  $G = (V, A)$  tel que :

- $V(G) = \{v_i / i = 1, \dots, 6\}$
- $A(G) = \{(v_i, v_j) / 1 \leq i, j \leq 6 ; i \neq j ; i \text{ divise } j\}$

Donner i) son ordre  $|G|$ , ii) le nombre d'arcs  $|A|$ , iii) les demi-degrés intérieurs de chaque sommet, iv) les demi-degrés extérieurs de chaque sommet, v) le degré minimum  $\delta(G)$  du graphe  $G$ , iv) le degré maximum  $\Delta(G)$  du graphe  $G$ . (Rappel : Le degré d'un sommet  $x$  de  $G$  est  $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$ )

**Exercice 2 :** On considère le graphe  $G$  ci-contre :

- 1- Ce graphe est-il complet ?
  - 2- Ce graphe est-il connexe ?
  - 3- Donner au moins trois chaînes différentes partant du sommet  $a$  vers le sommet  $e$ .
  - 4- Déterminer le nombre de sommets de degré impairs.
- Que peut-on dire sur ce graphe ?
- 5- Trouver une chaîne partant du sommet  $a$  et qui passe par toutes les arêtes du graphe. Cette chaîne est-elle eulérienne ? Cette chaîne est-elle élémentaire ?
  - 6- Chercher une chaîne partant du sommet  $e$  qui parcourt tous les sommets du graphe  $G$  et qui ne passe qu'une fois sur chacune des arêtes. Cette chaîne est-elle Eulérienne ?
  7. Trouver une chaîne simple partant de  $e$  et qui passe par tous les sommets de graphe. Cette chaîne est-elle simple ?

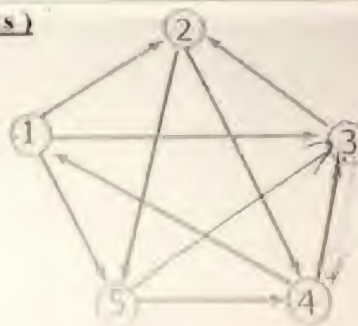


(Rappel : Une chaîne simple est une chaîne ne passant pas deux fois par une même arête.)

**FERMETURE TRANSITIVE ( 5 points )**

**Exercice 1 :** On considère le graphe orienté  $G$  ci-contre :

En appliquant un algorithme de votre choix (vu en cours), déterminer la fermeture transitive du graphe  $G$ .



**NOYAU D'UN GRAPHE ORIENTE ( 5 points )**

**Exercice 1 :** On considère l'algorithme Noyau suivant :

**Début**

Lire le graphe  $G = (X, U)$  : un graphe orienté sans circuit ;

Initialement aucun sommet n'est coloré ;

Numéroté les sommets du graphe  $G$  selon une numérotation inverse : si  $(i, j) \in U$  alors  $i$  est strictement plus grand  $j$  (en particulier le sommet 1 est un sommet sans successeur) ;

Colorer en rouge le sommet 1

Pour  $k = 2$  à  $N$  ( $N$  = nombre de sommets) faire

Si un des successeurs de  $k$  est rouge, colorer  $k$  en vert

Sinon colorer  $k$  en rouge

Fin Pour

Le noyau est l'ensemble des sommets rouges

**Fin**

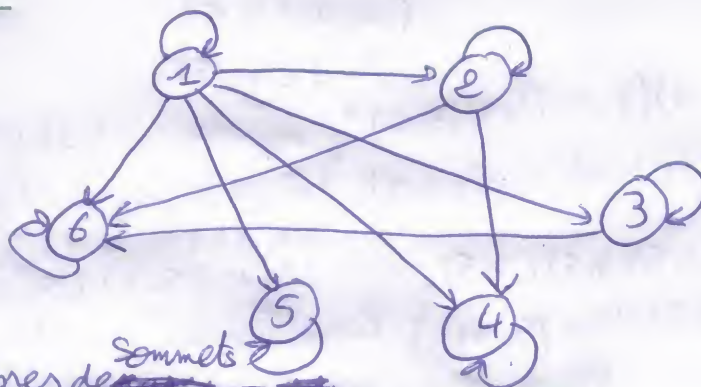
- 1- Le graphe  $G$  suivant admet-il cycle ? admet-il un noyau ?
- 2- Faire tourner l'algorithme Noyau sur le graphe  $G$





Autours du cours (10 pts)

Exercice 1 :



i)  $|G|$  = nombre de ~~sommets~~ ~~de~~

$$|G| = 6$$

ii)  $|A| = 14$

iii)  $d^-(1) = 0$  ;  $d^-(2) = 1$  ;  $d^-(3) = 1$  ;  $d^-(4) = 2$  ;  
 $d^-(5) = 1$  ;  $d^-(6) = 3$  ;

iv)  $d^+(1) = 5$  ;  $d^+(2) = 2$  ;  $d^+(3) = 1$  ;  $d^+(4) = 0$  ;  
 $d^+(5) = 0$  ;  $d^+(6) = 0$  ;

v)  $\delta(6)_{\min} = 1$

vi)  $\delta(6)_{\max} = 5$

Exercice 2 :

1) le graphe est complet.

2) le graphe est connexe.

3) a-b-e ; a-c-d-e ; a-c-f-e

4) 4 sommets, on peut dire que ce graphe admet une chaîne eulérienne

5) a-b-e-f-c-b-d-f-e-d-e-a

cette chaîne n'est pas eulérienne (passe 2 fois par l'arête e-f)

6) e-d-c-b-a-c-f-d-b-e

cette chaîne est ~~pas~~ pas eulérienne.

7) e-d-c-b-a-c-f-d-b-e

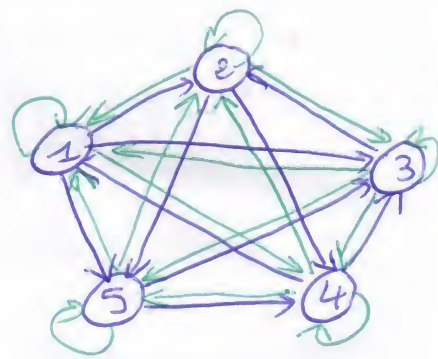
cette chaîne est simple.

Fermeture Transitive (5pts)

Exercice :

On appliquant l'algorithme de Warshall:

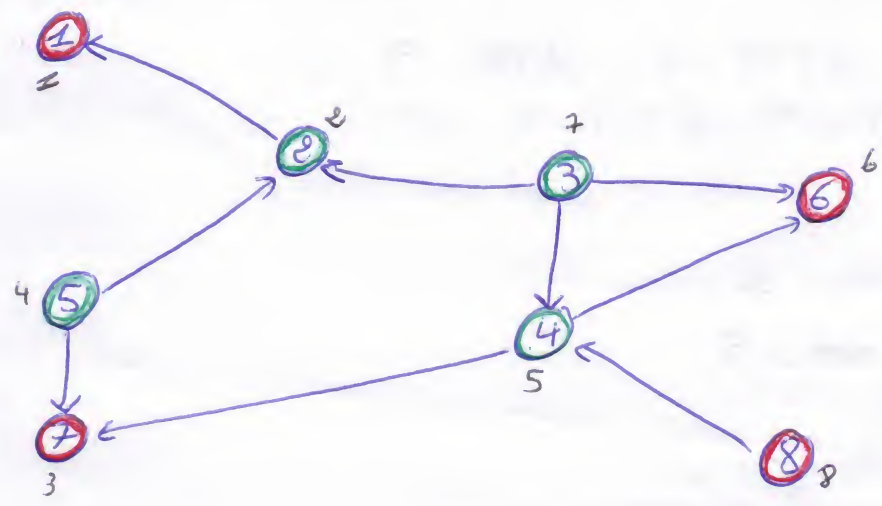
Sommet 1: arcs entrants (4,1) } ajouter  
 " sortants (1,2)(1,3)(1,5) } (4,2)(4,3)(4,5)  
Sommet 2: " entrants (1,2)(3,2)(4,2) } ajouter:  
 " sortants (2,4)(2,5) } (1,4)(1,5)  
 (3,4)(3,5)  
 (4,4)(4,5)  
Sommet 3: " entrants (1,3)(4,3)(5,3) } ajouter:  
 " sortants (3,4)(3,5) } (2,3)(2,5)  
 (4,3)(4,5)  
 (5,3)(5,5)  
Sommet 4: " entrants (1,4)(2,4)(3,4)(5,4) } ajouter: (1,1)(1,2)(1,3)(1,5)  
 " sortants (4,1)(4,2)(4,3)(4,5) } (2,1)(2,2)(2,3)(2,5)  
 (3,1)(3,2)(3,3)(3,5)  
 (5,1)(5,2)(5,3)(5,5)  
Sommet 5: " entrants (1,5)(2,5)(3,5)(4,5) } liana ajouter.  
 " sortants: (5,1)(5,2)(5,3)(5,4)



Noyau d'un graphe orienté (5pts)

Exercice:

- 1) le graphe G n'admet pas un cycle, et il admet un noyau
- 2)



Sommets noyau: 1 - 6 - 7 - 8

Sommets hors noyau: 2 - 3 - 4 - 5